

- LLUÍS BRUNA I FLORIS va llegir la seva tesi, dirigida per Joan Girbau i Badó, titulada *Estudi de l'estabilitat lineal de l'equació d'Einstein en els models de Robertson-Walker*, el dia 22 de desembre de 2004. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



L'objectiu d'aquesta tesi és establir el marc matemàtic adequat per a l'estabilitat lineal de l'equació d'Einstein $G = \chi T$, una vegada aconseguit això, trobar aquelles condicions perquè es doni aquest tipus d'estabilitat quan es considera un model de Robertson-Walker per a l'univers.

El concepte d'estabilitat lineal sorgeix en preguntar-se si realment les solucions d'una equació linealitzada serveixen per aproximar les solucions de la corresponent equació no lineal. En el cas de l'equació d'Einstein en el buit $G(g) = 0$ aquesta qüestió dóna lloc a la definició *clàssica* d'estabilitat, basada en la noció de tangència: donats dos espais de Banach X i Y i una aplicació diferencial $f: X \rightarrow Y$ entre ells, una equació del tipus $f(x) = y_0$ per a un y_0 arbitrari però fix es diu que és linealment estable en una solució x_0 si per a tota direcció h que satisfà $D_{x_0}f(h) = 0$ existeix una corba $x(\lambda)$ de solucions exactes que és tangent a h en x_0 .

D'acord amb el punt de vista d'Einstein en el seu article «Sobre les ones gravitatòries» (1918), l'estabilitat lineal de $G = \chi T$ ha de garantir que un procediment com el següent sigui correcte: interpreteu l'univers com un model de R-W (g_0, T_0) , ambdós relacionats per $G(g_0) = \chi T_0$; aleshores, donada una pertorbació δT de T_0 i amb la finalitat de trobar la corresponent pertorbació δg de g_0 que compleix $G(g_0 + \delta g) = \chi(T_0 + \delta T)$, considerem $D_{g_0}G(\delta g) = \chi\delta T$. Cal adonar-se de la petita diferència entre els dos casos: mentre el cas del buit obeeix l'esquema $f(x) = 0$, i. e., cerquem solucions de $f(x) = 0$ properes a la solució x_0 de la mateixa equació, en el cas de la matèria, donat qualsevol q proper a zero, ens interessem per aquelles solucions de $f(x) = y_0 + q$ que són a prop del punt x_0 que satisfà $f(x_0) = y_0$.

En conseqüència és necessària una definició d'estabilitat lineal adaptada a aquesta nova situació. En poques paraules, tot el que s'e-

xigeix és que les solucions de l'equació no lineal i les de l'equació linealitzada, per a un q donat, puguin ser parametritzades pel mateix espai vectorial (posem $\psi_q(z)$ i $\varphi_q(z)$, amb $\psi_0(0) = \varphi_0(0) = x_0$), de manera que l'error $E_q(z) = \varphi_q(z) - \psi_q(z)$ comès en considerar una o l'altra està controlat per la condició $\lim_{(z,q) \rightarrow (0,0)} \frac{E_q(z)}{\sqrt{\|z\|^2 + \|q\|^2}} = 0$. Tot i que la idea de tangència ha passat a ocupar un segon pla, aquesta definició més laxa ha d'implicar l'antiga quan $q = 0$ (per a una versió més detallada, mireu el capítol 3). La primera no és més que una petita modificació de l'última; de fet, la condició necessària és la mateixa per a ambdues: l'aplicació diferencial en x_0 ha de ser exhaustiva i el seu nucli ha de tenir un suplementari topològic.

Malgrat tot, aquesta nova definició no es pot aplicar directament a l'equació d'Einstein escrita en la forma $G = \chi T$ perquè la condició de conservació de l'energia $\text{div}_g T = 0$ lliga les primeres deformacions de g i de T . És per tant necessari trobar un nou marc on les variables que representen la geometria i l'energia o matèria siguin independents. Aquesta representació ve donada per un problema de Cauchy ben posat perquè si aquest és el cas a cada pertorbació de les dades inicials de Cauchy correspon una pertorbació de la solució i per tant l'estabilitat per linealització de les quatre equacions de lligam per a les dades de Cauchy és equivalent a la del sistema format per les equacions $G = \chi T$ i $\text{div}_g T = 0$. El capítol 1 està íntegrament dedicat al problema de Cauchy per a l'equació d'Einstein amb matèria. Es demostra que quan les equacions $G = \chi T$ i $\text{div}_g T = 0$ estan desacoblades i les equacions de la matèria $\text{div}_g T = 0$ poden ser escrites en forma de sistema hiperbòlic quasi lineal i simètric sense característiques, el problema de Cauchy associat al sistema $G = \chi T$ i $\text{div}_g T = 0$ està ben po-

sat. Per exemple, això s'esdevé per a un medi holònom i en particular per a un fluid perfecte.

En un model de Robertson-Walker (V, \tilde{g}, T) l'espai-temps V és una varietat producte $M \times I$ on (M, g) és una varietat de Riemann de curvatura (seccional) constant i I un interval de \mathbb{R} , la mètrica és de la forma $\tilde{g} = -dt \otimes dt + \zeta^2(t)g$, $t \in I$, i T és un tensor d'impulsió-energia corresponent a un fluid perfecte $T = (\rho + p)u \otimes u + p\tilde{g}$, on la densitat ρ i la pressió p depenen només de t i estan relacionades per una equació d'estat (capítol 2). Els resultats d'aquesta tesi estan recollits en la taula següent:

| varietat M | curvatura | compacitat | estabilitat |
|-----------------------|-----------|------------|-------------|
| \mathbb{R}^3 | 0 | no | sí |
| \mathbb{H}^3 | -1 | no | sí |
| \mathbb{S}^3 | 1 | sí | no |
| \mathbb{R}^3/Γ | 0 | sí | no |
| \mathbb{H}^3/Γ | -1 | sí | sí |

Aquí Γ a X/Γ es refereix a un subgrup discret del grup d'isometries de X que actua de manera lliure i pròpiament discontinua. La demostració en el capítol 4 dels dos primers ca-

sos (els anomenats universos oberts) utilitza les mateixes tècniques usades per Y. Choquet-Bruhat, A. Fischer i J. Marsden per demostrar l'estabilitat lineal de l'equació d'Einstein en el buit en la mètrica η de Minkowski. Cal dir, però, que en el cas hiperbòlic \mathbb{H}^3 ha estat necessari (apèndix A) donar una demostració explícita del fet que per una banda les pertorbacions d'ordre zero de la laplaciana i d'altra banda l'operador $\nabla^* L_X g$ són isomorfismes topològics, resultats que se sàpiga no existien en la literatura. El tercer cas (capítol 5) rau en el fet que la 3-esfera admet en cada punt una base de l'espai tangent formada per tres camps de Killing. Els últims dos casos (capítol 6), que no són simplement connexos, mostren que l'estabilitat per linealització no té res a veure amb la compacitat. La demostració de \mathbb{R}^3/Γ és idèntica a la de \mathbb{S}^3 , i el cas \mathbb{H}^3/Γ es basa en un resultat de S. Bochner (1946) que assegura que tota varietat de Riemann compacta i amb el tensor de Ricci definit negatiu té un nombre finit d'isometries.

- FRANCESC POZO MONTERO va llegir la seva tesi, dirigida per José Roderic Benedé, titulada *Nonlinear control of uncertain systems: some application-oriented issues*, el dia 20 de gener de 2005. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.



L'anàlisi i el control de sistemes amb incerteses són un dels problemes més interessants en l'àmbit de la teoria de control. En les últimes dues dècades hi ha hagut un augment important en la recerca dedicada a resoldre de manera analítica problemes de control on les incerteses poden aparèixer tant en la representació del sistema com en les mesures. No obstant això, la profusió de la producció científica amb una marcada orientació teòrica no ha estat acompanyat d'una recerca similar dels aspectes d'un caire més aplicat. Aquesta tesi pretén contribuir en la comprensió d'alguns aspectes pràctics d'algorismes de control específics. Més concretament, tractem el popular mètode anomenat *backstepping* i una tècnica recent computacional per resoldre el problema de la síntesi de sistemes no lineals.

Respecte als sistemes no lineals, els anys noranta van començar amb un important avenç: el *backstepping*, mètode de control recursiu per a sistemes no lineals i no restringit a fites lineals. La verdadera força d'aquest mètode va ser descoberta quan es van desenvolupar els dissenys de control per a sistemes no lineals amb incerteses estructurades. La manera com el *backstepping* incorporava les incerteses i els paràmetres desconeguts va contribuir a la seva difusió i acceptació. Aquesta tesi es dedica, d'una banda, a aplicar aquest mètode de control en el camp de l'enginyeria civil i, de l'altra, a fer un estudi de la sensibilitat numèrica de la implementació computacional del mètode.

En l'aplicació a l'enginyeria civil, es considera un sistema de control híbrid per a estructures amb aïllament de base histerètic (control

passiu) i un sistema de control actiu. L'objectiu del component de control actiu, aplicat a la base de l'estructura, és mantenir els desplaçaments relatius de la base amb el terra, i de l'estructura amb la base dins d'un rang raonable, d'acord amb el disseny de l'aïllament de base. L'aïllament de base exhibeix un comportament histerètic no lineal, descrit pel model de Bouc-Wen. El sistema es formula representant la dinàmica del sistema en dos sistemes de coordenades: absolutes (respecte a un eix inercial) i relatives al terreny. Es presenta una comparació entre les dues alternatives mitjançant simulacions numèriques i s'observa com, efectivament, la llei de control *backstepping* garanteix l'estabilitat i un bon comportament transitori del llac tancat.

Una altra línia de recerca ha estat l'estudi de la sensibilitat numèrica del *backstepping* adaptatiu. En aquest sentit, la complexitat de la llei de control fa imprescindible l'ajut del càlcul numèric per a fer les computacions del senyal de control. El nostre treball estudia per primer cop els aspectes de sensibilitat numèrica del disseny de sistemes de control mitjançant *backstepping*. Es demostra que, tot i que l'augment dels paràmetres de disseny millo-

ra teòricament la resposta del sistema, aquest augment provoca l'aparició d'altres freqüències en el senyal de control.

La tercera línia de recerca que tractem en aquest treball és la utilització de solucions numèriques a problemes de control quan solucions analítiques —com ara el *backstepping*— fallen o són molt difícils d'implementar. De fet, una limitació de la tècnica del *backstepping* és la necessitat que el sistema controlat tingui una certa estructura triangular. D'altra banda, una altra limitació pràctica d'aquest mètode és la sensibilitat numèrica o la complexitat de la llei de control. Com una alternativa a les solucions analítiques del problema de control, es presenta una nova tècnica numèrica. La tècnica està basada en un criteri de convergència recentment desenvolupat —dual del segon teorema de Lyapunov— i en un programari que verifica la positivitat de polinomis de diverses variables basant-se en una descomposició en sumes de quadrats. Les nostres contribucions en aquesta àrea consisteixen a estendre aquestes tècniques a sistemes racionals i la inclusió d'incerteses paramètriques en la formulació del problema de síntesi del control.

- JOSEP RUBIÓ MASSEGÚ va llegir la seva tesi, codirigida per Eusebi Jarauta Bragulat i Pere Rubió Díaz, titulada *Sobre l'ordenació de les arrels reals de les derivades de polinomis a coeficients reals*, el dia 10 de febrer de 2005. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.



Alguns problemes clàssics sobre teoria analítica de polinomis estan relacionats amb un problema més general: determinar com estan ordenades les arrels reals d'un polinomi a coeficients reals i les arrels reals de totes les seves derivades.

Si ens restringim a l'ordenació entre arrels de derivades consecutives d'un polinomi, aquest problema pot formular-se de la manera següent. Sigui n un nombre natural no nul. Per a cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$ considerem variables indeterminades $x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{m(j)}^{(j)}$, que anomenarem variables de derivació j , i que considerarem lligats per les desigualtats $x_1^{(j)} < x_2^{(j)} < \dots < x_{m(j)}^{(j)}$. Definir un ordre entre variables de derivacions consecutives significa especifi-

car, per a dues variables qualssevol de derivacions consecutives, diguem $x_{i_1}^{(j)}$ i $x_{i_2}^{(j+1)}$, una de les tres ordenacions següents: (i) $x_{i_1}^{(j)} < x_{i_2}^{(j+1)}$, (ii) $x_{i_1}^{(j)} = x_{i_2}^{(j+1)}$ o (iii) $x_{i_1}^{(j)} > x_{i_2}^{(j+1)}$. Llavors, el problema consisteix a determinar per a quines ordenacions entre variables de derivacions consecutives existeix un polinomi $P(x)$, de grau n , de manera que si les arrels reals de cada derivada $P^{(j)}$, $0 \leq j \leq n - 1$, són els nombres $y_1^{(j)} < y_2^{(j)} < \dots < y_{r(j)}^{(j)}$, aleshores $r(j) = m(j)$ i entre arrels de derivades consecutives es verifiquen els lligams proposats. És a dir, si (i) $x_{i_1}^{(j)} < x_{i_2}^{(j+1)}$, (ii) $x_{i_1}^{(j)} = x_{i_2}^{(j+1)}$, o (iii) $x_{i_1}^{(j)} > x_{i_2}^{(j+1)}$, aleshores s'ha de complir (a) $y_{i_1}^{(j)} < y_{i_2}^{(j+1)}$, (b) $y_{i_1}^{(j)} = y_{i_2}^{(j+1)}$ o (c) $y_{i_1}^{(j)} > y_{i_2}^{(j+1)}$.

respectivament. Si tal polinomi existeix aleshores es diu que l'ordenació proposada és representable per un polinomi.

El teorema de Rolle imposa restriccions en l'ordenació de les variables en el cas que aquesta ordenació sigui representable per polinomis. Concretament, si $x_i^{(j)} < x_{i+1}^{(j)}$ són dues variables consecutives amb una mateixa derivació j , aleshores ha d'existir una variable de derivació $j + 1$, $x_k^{(j+1)}$, tal que $x_i^{(j)} < x_k^{(j+1)} < x_{i+1}^{(j)}$. No obstant això, les restriccions imposades pel teorema de Rolle no són suficients perquè una ordenació de les variables sigui representable per un polinomi.

En aquest sentit, ens proposem assolir els tres objectius següents:

- (1) Caracteritzar les ordenacions entre variables de derivacions consecutives que són representables per polinomis.
- (2) Classificar els polinomis segons l'ordenació de les arrels de derivades consecutives i trobar certs nombres d'interès relacionats amb aquesta classificació, com per exemple el nombre de classes en què queden classificats els polinomis de grau n i el nombre de clas-

ses obertes de grau n (classes estables per a pertorbacions).

- (3) Estudiar què succeeix quan es consideren ordenacions que inclouen lligams entre variables de derivacions no consecutives.

L'objectiu (1) s'ha assolit establint que les ordenacions entre variables de derivacions consecutives representables per polinomis coincideixen amb les ordenacions que satisfan les restriccions imposades per un resultat que generalitza el teorema de Rolle. Essencialment, s'ha obtingut el recíproc del teorema, que diu que entre cada dues arrels reals consecutives d'un polinomi hi ha un nombre senar d'arrels de la derivada comptant multiplicitats.

L'objectiu (2) s'ha assolit classificant els polinomis segons l'ordenació que presenten les arrels de les seves derivades consecutives. Els nombres d'interès relacionats amb aquesta classificació s'han obtingut a partir de fórmules recurrents.

L'objectiu (3) s'ha assolit determinant els nombres n per als quals la mencionada generalització del teorema de Rolle és suficient perquè una ordenació de les variables que inclogui lligams entre variables de derivacions no consecutives sigui representable per un polinomi.

- JAVIER HERRANZ SOTOCA va llegir la seva tesi, dirigida per Germán Sáez i Moreno, titulada *Estudi d'un problema de convecció natural en un cub des del punt de vista dels sistemes dinàmics*, el dia 15 d'abril de 2005. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada IV de la Universitat Politècnica de Catalunya.



Les signatures digitals són una de les conseqüències més importants de l'aparició de la criptografia de clau pública, l'any 1976. Aquest tipus d'esquema proporciona autenticitat, integritat i no repudi a les comunicacions digitals. En els últims anys, s'han anat introduint algunes extensions o variacions del concepte de signatura digital, i s'han proposat molts esquemes realitzant aquests nous tipus d'esquemes de signatura.

En aquesta tesi, considerem les definicions bàsiques i les propietats de seguretat requerides als esquemes tradicionals de signatura digital i en dos de les seves extensions: els esquemes distribuïts de signatura digital i els esquemes de

signatura d'anell. En els esquemes distribuïts, diferents usuaris d'una entitat fixa han de col·laborar per calcular una signatura en nom de l'entitat, a partir dels seus fragments d'una informació privada. En els esquemes de signatura d'anell, un usuari escull un conjunt d'usuaris que el conté i calcula una signatura anònima en nom d'aquest conjunt, de manera que tothom està convençut que algú dins del conjunt ha signat, però ningú no sap quin membre del conjunt ho ha fet.

Fem una revisió de l'estat de l'art referent a aquests dos temes, i després proposem i analitzem nous esquemes específics per a diferents escenaris. Concretament, estudiem primer es-

quemes distribuïts de signatura basats en RSA, per a estructures d'accés generals. Després mostrem que aquests esquemes es poden fer servir com a base per a la construcció d'altres protocols criptogràfics, com són els esquemes distribuïts de distribució de claus i els esquemes de comptatge. En el terreny de les signatures d'anell, proposem esquemes per a escenaris on les claus criptogràfiques són del tipus logaritme discret, i per a escenaris on les claus són basades en identitats. Finalment, proposem també

alguns esquemes distribuïts de signatura d'anell, que són un tipus d'esquema que combina els conceptes de signatures distribuïdes i signatures d'anell.

Demostrem formalment la seguretat de totes aquestes propostes, assumint que alguns problemes matemàtics són difícils de resoldre. Específicament, basem la seguretat dels nostres esquemes en la dificultat del problema RSA, o bé del problema del logaritme discret, o bé del problema computacional de Diffie-Hellman.

- SONIA TARRAGONA ROMERO va llegir la seva tesi, codirigida per María Isabel García Planas i Maria Dolors Magret Planas, titulada *Estudio geométrico de familias diferenciables de sistemas singulares*, el dia 27 de maig de 2005. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Els objectes tractats en aquesta tesi són sistemes dinàmics lineals singulars invariants en el temps $E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$, que representem mitjançant quaternes de matrius $(E, A, B, C) \in M_n(C) \times M_n(C) \times M_{n \times m}(C) \times M_{p \times n}(C)$.

L'estudi se centra en dues relacions d'equivalència, la semblança per realimentació i l'equivalència per realimentació, que són les que admeten canvis de base en els espais d'estat, d'entrades i de sortides, realimentació d'estats i derivativa, injecció externa i, en el segon cas, a més, premultiplicació de l'equació d'estats per una matriu invertible.

La primera es pot considerar com la generalització natural de la semblança per a matrius quadrades i la semblança per blocs de la qual s'obté la forma reduïda de Kronecker. Per a aquesta relació d'equivalència, trobar una forma reduïda canònica és un problema obert, del qual en aquesta tesi es dona solució en alguns casos. S'observa que si $B = 0$ i $C = 0$, el problema es redueix a l'impossible de classificar simultàniament parelles de matrius per la relació de semblança. Recordem que els problemes que contenen aquest problema es coneixen com *wild problems*.

La introducció de la segona relació és motivada pel fet que quan el sistema és normalitzable mitjançant una realimentació derivativa, el sistema estàndard resultant no és equivalent al

primer per la semblança per realimentació. És per això que convé introduir aquesta nova relació d'equivalència. Per aquesta segona relació també es troben formes reduïdes en els mateixos casos que per a la primera relació així com un conjunt complet d'invariants que permeten decidir, donada una quaterna qualsevol, a quina classe d'equivalència pertany.

S'aborda també el càlcul de deformacions versals per a ambdues relacions d'equivalència seguint les tècniques geomètriques introduïdes per V. I. Arnold en el cas particular de la varietat diferenciable de les matrius quadrades en les quals actua el grup lineal. Una aplicació de la descripció de deformacions miniversals explícites és l'estudi de pertorbacions locals i l'obtenció de la dimensió de les diferents òrbites. Es realitza també l'anàlisi de l'estabilitat estructural caracteritzant les quaternes estructuralment estables.

Finalment, i a causa que la partició en òrbites de l'espai de quaternes de matrius no és localment finita, es presenta una nova partició (per a ambdues relacions d'equivalència) en estrats formats per la unió disjunta d'òrbites que tenen els mateixos invariants discrets variant tan sols en el valor del paràmetre continu. S'estudien propietats de regularitat de les estratificacions i com aplicació es presenten els diagrames de bifurcacions de famílies de sistemes amb pocs paràmetres.

- DOLORS PUIGJANER I RIBA va llegir la seva tesi, codirigida per Carles Simó i Torres i Francesc Giralt i Prat, titulada *Estudi d'un problema de convecció natural en un cub des del punt de vista dels sistemes dinàmics*, el dia 26 de juny de 2005. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona.



El problema de convecció natural, també anomenat de Rayleigh-Bénard, representa un sistema dinàmic dissipatiu que conté dos paràmetres importants: el nombre de Rayleigh (Ra) i el nombre de Prandtl (Pr). Des del punt de vista pràctic la convecció natural és fonamental, tant en problemes més recents com els sistemes d'aïllaments i climatització d'edificis com en problemes més tradicionals com els processos de cristallització. Des del punt de vista teòric, l'estudi d'aquest problema ens pot ajudar a entendre els mecanismes de formació d'estructures o patrons del flux, les diverses inestabilitats hidrodinàmiques i les successives bifurcacions que poden conduir a l'inici de la turbulència.

En aquest treball s'ha desenvolupat una metodologia que permet determinar les bifurcacions i l'estabilitat de les solucions estacionàries del problema de convecció natural en cavitats paralelepípediques. Aquesta metodologia implementa dos algorismes de continuació: l'un usa el Ra en la parametrització de les corbes de solucions i l'altre el paràmetre arc. Ambdós algorismes es basen en el mètode espectral de Galerkin. Usant una formulació de la velocitat en termes de funcions potencials s'ha obtingut una base completa en la qual les condicions a la frontera i la conservació de la massa es verifiquen idènticament. La paritat de les funcions base s'ha tingut en compte per reduir la dimensió del problema i per interpretar la topologia de les diferents estructures de flux que s'han identificat. S'ha comprovat que el comportament dels coeficients espectrals respecte als paràmetres de truncament s'ajusta força bé al comportament típic de la convergència geomètrica.

Aquesta metodologia s'ha aplicat per determinar diagrames de bifurcacions dels fluxos estacionaris a l'interior d'una cavitat cúbica escalfada per sota per a valors Ra fins a $1,5 \times 10^5$. S'ha triat la geometria cúbica perquè la seva pròpia simetria fa que tendixin a desenvolupar-se fluxos amb simetries en la se-

va organització espacial. En augmentar el Ra , aquests fluxos simètrics, tendeixen a tenir bifurcacions de trencament de simetria i, per tant, els diagrames de bifurcacions que es generen són força complexos, molt més que en el cas d'un paralelepípede arbitrari. Aquest problema s'ha investigat per a dos fluids amb propietats físiques força diferents, aire ($Pr = 0,71$) i oli de silicó ($Pr = 130$), i per a dues condicions de frontera: parets laterals perfectament adiabàtiques i parets laterals perfectament conductores. S'han calculat, doncs, quatre diagrames de bifurcacions. La importància de tenir en compte les solucions inicialment inestables ha quedat palesa en aquest treball, ja que algunes d'aquestes solucions han esdevingut estables després de passar per una o diverses bifurcacions.

En total s'han continuat tretze i catorze branques de solucions, respectivament, per a $Pr = 0,71$ i $Pr = 130$ en el cas de parets laterals adiabàtiques. D'aquestes n'hi ha cinc i sis, respectivament, que són estables per a alguns rangs de Ra en l'interval estudiat. Quan es consideren parets laterals perfectament conductores els nombre de branques calculades per a $Pr = 0,71$ i $Pr = 130$ és vint-i-una i trenta-cinc, respectivament, de les quals n'hi ha quatre i nou, respectivament, que són estables per a alguns rangs de Ra en la regió investigada. En els quatre casos estudiats s'han trobat alguns intervals de Ra en els quals existeixen alhora més d'una solució estable. Molts dels fluxos identificats evolucionen cap a fluxos força més complexos quan s'augmenta el Ra . S'ha comprovat que quan aquesta evolució és considerable queda perfectament reflectida en els canvis que experimenta el nombre de Nusselt en els diagrames de bifurcacions. Els resultats obtinguts concorden amb els resultats experimentals prèviament publicats i expliquen la majoria de les transicions entre diferents estructures de flux observades per al cas $Pr = 130$.

- RICARD MARTÍ I MIRAS va llegir la seva tesi, dirigida per Enric Nart Viñals, titulada *Enumeració d'òrbites de n -conjunts d'espais projectius sota l'acció del grup lineal*, el dia 19 de juny de 2006. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



En aquesta memòria empenem un estudi enumeratiu dels n -conjunts racionals d'espais projectius sobre un cos finit k . Atenent a la doble naturalesa dels n -conjunts (racionals punt a punt o globalment) i al fet que admetin o no repeticions dels seus punts, l'objectiu de la memòria és el d'obtenir fórmules explícites per a les quatre famílies de nombres següents:

$$T_N(n) := \left| \text{PGL}_{N+1}(k) \backslash \left(\binom{\mathbb{P}^N(k)}{n} \right) \right|,$$

$$\bar{T}_N(n) := \left| \text{PGL}_{N+1}(k) \backslash \left(\left(\binom{\mathbb{P}^N(k)}{n} \right) \right) \right|,$$

$$t_N(n) := \left| \text{PGL}_{N+1}(k) \backslash \left(\binom{\mathbb{P}^N}{n} \right) (k) \right|,$$

$$\bar{t}_N(n) := \left| \text{PGL}_{N+1}(k) \backslash \left(\left(\binom{\mathbb{P}^N}{n} \right) \right) (k) \right|,$$

on, en general, donat un conjunt finit X i un grup finit Γ que actua sobre X , denotem per $\Gamma \backslash X$ el conjunt d'òrbites d'aquesta acció, i

$$\binom{\mathbb{P}^N}{n} (k) := \binom{\mathbb{P}^N(\bar{k})}{n}^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$$

$$\left(\binom{\mathbb{P}^N}{n} \right) (k) := \left(\binom{\mathbb{P}^N(\bar{k})}{n} \right)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

En el capítol 1 de la memòria obtenim fórmules per als $T_2(n)$, $\bar{T}_2(n)$ i d'altres nombres relacionats, que compten el nombre de classes d'isometria de codis de dimensió tres amb certes propietats específiques. Les fórmules es basen en un recompte explícit del nombre de classes de conjugació d'elements de $\text{PGL}_3(k)$ que donen lloc a permutacions de $\mathbb{P}^2(k)$ amb la mateixa descomposició en cicles i són prou mal·leables com per permetre obtenir expressions dels nombres $T_2(n)$, $\bar{T}_2(n)$ com a polinomis en q (on $k = \mathbb{F}_q$) amb coeficients racionals.

En el capítol 2 trobem fórmules explícites per al nombre total de n -conjunts racionals i en el capítol 3 estudiem el nombre d'òrbites sota l'acció del grup lineal. El resultat clau és un

càlcul de la funció zeta del quocient d'un espai projectiu per un automorfisme. A partir d'aquest resultat es pot imitar el procediment del capítol 1 per obtenir expressions explícites per als $t_2(n)$, $\bar{t}_2(n)$ com a polinomis en q amb coeficients enters.

En el capítol 4 desenvolupem aquestes idees per a un espai projectiu \mathbb{P}^N de dimensió arbitrària. Els mètodes utilitzats en els capítols anteriors se sintetitzen en la classificació dels elements de $\text{PGL}_{N+1}(k)$ en *subtipus* i en la construcció per a cada subtipus α d'un poset $\mathcal{L}(\alpha)$ amb pesos *dimensió* i *exponent* en cada node V , que permeten considerar un *indicador d'exponents*

$$\mathcal{L}(\text{PGL}_{N+1}, \mathbb{P}^N) := \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} N_\alpha \prod_{V \in \mathcal{L}(\alpha)} z_{\alpha, V} \in \mathbb{Q}\{\{z_{\alpha, V}\}\},$$

on \mathcal{T} és el conjunt de tots els subtipus possibles i N_α compta el nombre de classes de conjugació de $\text{PGL}_{N+1}(k)$ amb subtipus α fixat. Els posets $\mathcal{L}(\alpha)$ es construeixen a partir de subvarietats lineals γ -invariants *pròpies*, on $\gamma \in \text{PGL}_{N+1}(k)$ és qualsevol automorfisme amb subtipus α . A partir d'aquest indicador d'exponents obtenim

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} T_N(n) x^n = \mathcal{L}(\text{PGL}_{N+1}, \mathbb{P}^N) |_{z_{\alpha, V} = h_{\alpha, V}(x)},$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{T}_N(n) x^n = \mathcal{L}(\text{PGL}_{N+1}, \mathbb{P}^N) |_{z_{\alpha, V} = \bar{h}_{\alpha, V}(x)},$$

per a funcions $h_{\alpha, V}(x)$, $\bar{h}_{\alpha, V}(x)$, que donem explícitament.

Considerem després una distribució anàloga dels elements de $\text{PGL}_{N+1}(k)$ en G -subtipus (la G fa referència a Galois), i per a cada G -subtipus α construïm un poset $\mathcal{L}_G(\alpha)$ amb pesos *dimensió*, *exponent* i *grau* en cada node V , que permeten considerar un G -indicador d'exponents

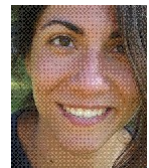
$$\mathcal{L}_G(\text{PGL}_{N+1}, \mathbb{P}^N) := \sum_{\alpha \in \mathcal{T}_G} N_{G, \alpha} \prod_{V \in \mathcal{L}_G(\alpha)} z_{\alpha, V} \in \mathbb{Q}\{\{z_{\alpha, V}\}\},$$

on \mathcal{T}_G és el conjunt de tots els G -subtipus possibles i $N_{G,\alpha}$ compta el nombre de classes de conjugació de $\mathrm{PGL}_{N+1}(k)$ amb G -subtipus α fixat. A partir d'aquest G -indicador d'exponents podem obtenir com en el cas anterior un còmput explícit de la funció generadora dels $t_N(n)$ i $\bar{t}_N(n)$.

Per poder pensar que aquestes fórmules són plenament satisfactòries des del punt de vista combinatori calen dues coses. En primer lloc cal obtenir una descripció intrínseca dels conjunts

\mathcal{T} , \mathcal{T}_G i dels posets $\mathcal{L}(\alpha)$, $\mathcal{L}_G(\alpha)$, en termes de dades combinatòries independents de l'estructura de grup de $\mathrm{PGL}_{N+1}(k)$; aquesta tasca s'acompleix en el capítol 4. Finalment, cal disposar també de fórmules explícites per als coeficients universals N_α , $N_{G,\alpha}$; aquesta tasca, que s'ha dut a terme en els capítols 1, 2 i 3 en el cas del pla projectiu, adquireix una gran complexitat en dimensions més grans i aquest càlcul ha quedat finalment fora de l'abast d'aquesta memòria.

- MÒNICA MANJARÍN ARCAS va llegir la seva tesi, dirigida per Marcel Nicolau Reig, titulada *Estudi d'una classe de varietats complexes compactes*, el dia 6 de juliol de 2006. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



En aquesta tesi doctoral presentem una nova tècnica per construir una família d'estructures complexes no-kählerianes sobre certes classes de varietats compactes. La motivació principal d'aquest estudi es deu al fet que la majoria d'exemples de varietats complexes que es coneixen, en particular totes les varietats projectives, són de tipus kählerià, tot i que a partir de la dimensió 3 les varietats complexes de tipus kählerià són relativament escasses. L'eina bàsica és la classe de varietats reals de dimensió senar que admeten una estructura CR de dimensió màxima i una acció CR transversa de \mathbb{R} , que es coneix com *estructura normal de quasi contacte* (nacs). Més precisament, partim d'una varietat dotada d'una nacs i per construccions geomètriques elementals obtenim una varietat compacta amb una estructura complexa definida per mitjà de la nacs de partida. Considerem tres construccions: (A) productes de dues varietats reals dotades de nacs, (B) S^1 -fibrats principals sobre una varietat amb una nacs (verificant una restricció addicional sobre el fibrat) i (C) suspensions d'una varietat amb una nacs per un automorfisme que la preserva. Totes les varietats obtingudes per aquests procediments admeten un camp holomorf sense zeros. Recíprocament, demostrem que l'estructura complexa d'una varietat Kähler compacta que admet un camp holomorf sense zeros es pot recuperar per la construcció del cas (C). En particular demostrem que tota varietat compacta dotada d'una nacs admet una complexificació i que tota varietat Kähler compacta amb un camp holomorf sense zeros és la complexifica-

ció d'una varietat compacta amb una nacs. La següent qüestió que ens plantejarem és caracteritzar quan les estructures complexes anteriors admeten una mètrica kähleriana. Demostrem que existeix una obstrucció perquè les varietats d'aquests tipus siguin de tipus kählerià que s'expressa en termes d'un invariant cohomològic de la nacs de partida: la classe d'Euler del flux associat a la CR-acció. Provem que cap varietat complexa obtinguda per les construccions anteriors pot ser de tipus kählerià a menys que les classes d'Euler de totes les nacs implicades siguin zero. A més, quan els fluxos associats a les CR-accions són isomètrics donem condicions necessàries i suficients perquè la varietat sigui de tipus kählerià utilitzant la teoria transversa de Hodge. En els casos (A) i (B) la caracterització es pot expressar de forma aproximada dient que la varietat complexa resultant és de tipus kählerià si i només si les classes d'Euler són zero i els fluxos són transversalment kählerians. En el cas (C), com que imposar que el flux sigui isomètric és massa restrictiu, estudiem la qüestió sota altres hipòtesis. D'altra banda, com es coneixen pocs exemples de varietats de dimensió més gran que 3 que admetin nacs, en la memòria estudiem nacs sobre grups de Lie compactes i connexos de dimensió senar. Comencem caracteritzant geomètricament totes les nacs invariants per l'esquerra sobre els grups de Lie semisimples compactes i connexos i utilitzem aquesta discussió per construir (noves) nacs no-invariants sobre qualsevol grup de Lie connex compacte de dimensió senar.

- CARMÉ OLIVÉ FARRÉ va llegir la seva tesi, dirigida per Tere Martínez-Seara, titulada *Càlcul de l'escissió de separatrius usant tècniques de matching complex i ressurgència aplicades a l'equació de Hamilton-Jacobi*, el dia 10 de juliol de 2006. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.



L'objecte del nostre estudi és aplicar les tècniques de *matching* complex i de la teoria de la ressurgència al problema de la mesura de zones caòtiques en sistemes dinàmics hamiltonians.

Ens hem centrat en un exemple test que han usat ja diferents autors anteriorment, com és el sistema del pèndol amb una pertorbació ràpidament oscil·lant $\mu(1 - \cos q) \sin(t/\varepsilon)$ amb $0 < \varepsilon < 1$. La metodologia i tècniques emprades són però aplicables a un ventall més ampli de sistemes. El paràmetre μ és independent de ε i no necessàriament petit.

Aquest tipus de sistemes es comporten com propers a integrables tot i que la pertorbació no sigui petita, perquè les zones caòtiques esdevenen exponencialment petites quan ε tendeix a zero. Per tenir una idea de la magnitud d'aquestes zones caòtiques, estudiem el trencament de les separatrius, associades a l'òrbita homoclínica del sistema no pertorbat, i mesurem la separació entre les varietats invariants estable i inestable associades a l'òrbita periòdica hiperbòlica apareguda quan el paràmetre μ no és zero. Aquestes varietats bidimensionals poden representar-se com a grafs de les diferencials d'unes funcions analítiques T^+ i T^- , que són dues solucions particulars de l'equació en derivades parcials de Hamilton-Jacobi.

Després d'un canvi de variables adequat en el pla complex, que ens porti prop de la singularitat de l'òrbita homoclínica del sistema no pertorbat, és possible obtenir de l'equació de Hamilton-Jacobi una part dominant independent del paràmetre singular ε , anomenada equació Inner.

Mitjançant la teoria de la ressurgència, a partir de dues solucions particulars de l'equació Inner, calculem en primer ordre de ε la separació entre les varietats invariants.

La diferència total $T^+ - T^-$ és solució d'una equació en derivades parcials lineal homogènia, de la qual, per redreçament del flux, es demostra que les seves solucions fitades a una certa banda vertical complexa són exponencialment petites al camp real. Usant tècniques de *matching* complex, obtenim tant la fita de $T^+ - T^-$, com el canvi de variables que redreça el flux.

Si $\mu = \varepsilon^p$, els resultats als quals hem arribat confirmen, en els casos $0 < p < 2$ que encara quedaven pendents, el terme dominant de la distància entre varietats que preveu el mètode pertorbatiu de Poincaré-Melnikov. En qualsevol cas, obtenim una fórmula asimptòtica d'aquesta distància per a ε petit, amb el paràmetre μ independent de ε .

- MARIA ROSA LATORRE I SARLÉ va llegir la seva tesi, dirigida per Joaquim Giménez Rodríguez, titulada *Regulació de la noció de volum en un aula inclusiva*, el dia 4 de maig de 2007. La tesi correspon al Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica de la Facultat de Pedagogia de la Universitat de Barcelona.



Dins el món educatiu s'han d'atendre les necessitats d'una gran diversitat d'alumnat i, en particular, s'han d'adequar a les estratègies d'aprenentatge i ensenyament d'aquells alumnes deficients auditius que es troben en aules inclusives en l'educació secundària obligatòria, de manera que se'ls faciliti l'accés als nous coneixements de forma significativa i dinàmica. El desenvolupament de les noves tecnologies pos-

sibilita la incorporació d'avenços tecnològics i ajudes específiques en el treball matemàtic i amb això s'aconsegueixen noves maneres d'ensenyar i avaluar en matemàtiques.

El problema de la investigació aporta de quina manera s'ha de dissenyar un entorn - sistema d'aprenentatge - regulació sobre la noció de mesura de volum que permeti i potencii l'activitat geomètrica via l'ordinador, entre l'alum-

nat amb dèficit auditiu, alumnat oient i professorat. D'altra banda, també es mostra com és el desenvolupament del procés regulador i quines són les dificultats, semblances i diferències quan es posa en funcionament aquest entorn en una aula inclusiva amb una alumna deficient auditiva i alumnes oients amb dificultats d'aprenentatge del mateix nivell que ella mateixa, durant dos cursos acadèmics.

Per a poder respondre a aquesta problemàtica, s'ha desenvolupat i implementat un primer disseny d'adaptacions curriculars teletutoritzades sobre volum, i s'ha possibilitat un posterior redisseny de l'estructura més pautat, a partir dels resultats obtinguts. D'aquesta manera, partint de l'anàlisi del disseny inicial i de la replanificació no només s'estableixen i tipifiquen les semblances, diferències i dificultats en

el procés d'aprenentatge de l'alumna deficient auditiva, de la seva parella oient i de la resta de l'alumnat oient sobre l'adquisició de la noció de la mesura de volum i les seves característiques, sinó que permet la identificació de les ajudes específiques que s'han d'oferir als alumnes sords per tal d'afrontar les seves dificultats a l'hora de construir la idea de volum, cosa que reforça al mateix temps el sistema cognitiu de l'alumnat, en fer-los conscients dels seus propis progressos. Finalment, es mostra l'evolució al llarg de tot el procés de la construcció de la idea de volum, tant per part de l'alumna deficient auditiva com de l'alumnat oient, respecte als aspectes relacionats amb el volum que s'ha considerat en aquesta investigació: la visualització, la unitat, la variabilitat, la comparació i equivalència i l'estimació del volum.